

Hoofdstuk 4: Veranderingen

4.1 Stijgen, dalen en intervallen

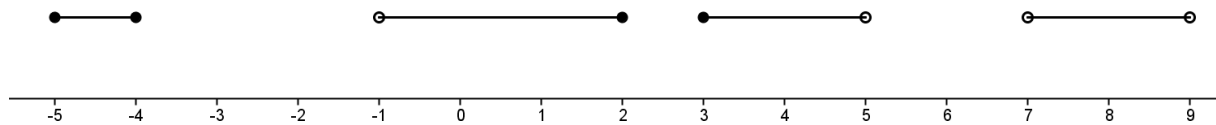
Opgave 1:

- 4.00-11.00 uur
- eerst een toenemende stijging, daarna een afnemende stijging
- eerst een toenemende daling, daarna een afnemende daling

Opgave 2:

$\langle -6, -2 \rangle$ $[-1, 0]$ $[1, 3)$ $\langle 4, 10]$

Opgave 3:



Opgave 4:

- $-1 < x \leq 2$
- $6 \leq x < 10$
- $5 \leq x \leq 15$
- $0 \leq x < 4,5$

Opgave 5:

- $[-8, 3)$
- $< 4, 4\frac{1}{2}]$
- $[5, 1; 7, 3]$
- $\langle 3, \pi]$

Opgave 6:

afnemende daling $\langle \leftarrow, 1 \rangle$
toenemende stijging $\langle 1, 2 \rangle$
afnemende stijging $\langle 2, 3 \rangle$
toenemende daling $\langle 3, \rightarrow \rangle$

Opgave 7:

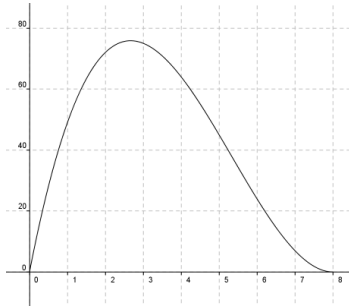
afnemende daling $\langle \leftarrow, -4 \rangle$
toenemende stijging $\langle -4, -1\frac{1}{2} \rangle$
afnemende stijging $\langle -1\frac{1}{2}, 1 \rangle$
toenemende daling $\langle 1, 3 \rangle$
afnemende daling $\langle 3, 5 \rangle$
toenemende stijging $\langle 5, \rightarrow \rangle$

Opgave 8:

- a. constante stijging $\langle 0,3 \rangle$
afnemende stijging $\langle 3,4 \rangle$
toenemende daling $\langle 4;5,2 \rangle$
afnemende daling $\langle 5,2;7 \rangle$
toenemende stijging $\langle 7,10 \rangle$
- b. na 7 minuten, op dat moment is zijn snelheid het laagst

Opgave 9:

a.



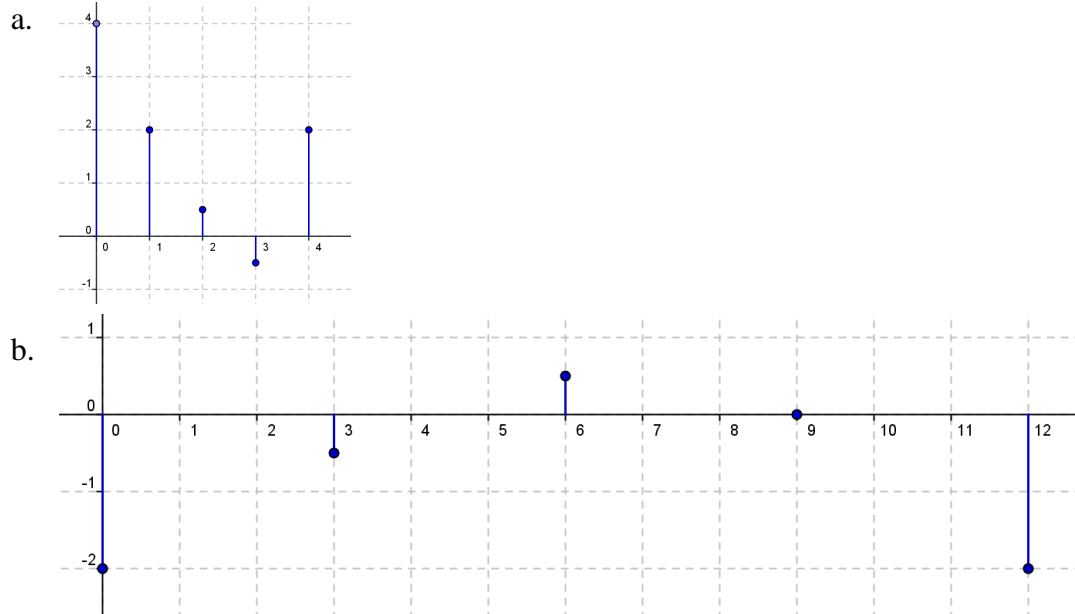
- b. $y_1 = x^3 - 16x^2 + 64x$ calc-menu maximum geeft $x = 2,67$
dus na 2 min en 40 sec
- c. $y_1 = x^3 - 16x^2 + 64x$ en $y_2 = 20$
calc-menu intersect geeft: $x = 0,34 \vee x = 6,20$
dus $\langle 0,3;6,2 \rangle$
- d. na ongeveer 5 uur

4.2 Toenamedigrammen

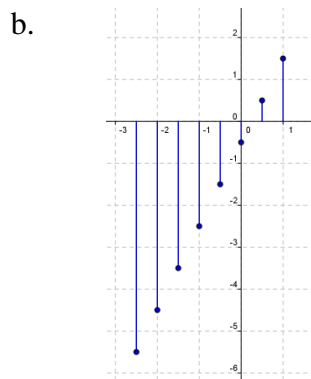
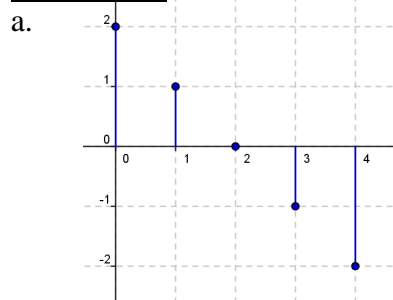
Opgave 10:

- de toename in het eerste kwartaal is 30 000
dus $480\,000 + 30\,000 = 510\,000$
- $510\,000 + 20\,000 + 25\,000 + 8\,000 = 563\,000$
- $510\,000 + 530\,000 + 555\,000 + 563\,000 = 2\,158\,000$
- $563\,000 + 3\,000 - 25\,000 - 15\,000 - 30\,000 = 496\,000$
- in het tweede, derde en vierde kwartaal van 2006

Opgave 11:



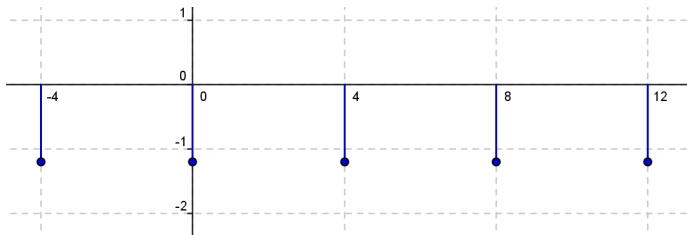
Opgave 12:



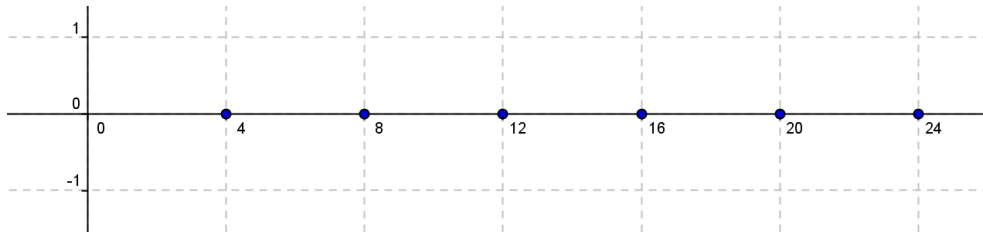
c. de punten liggen op een rechte lijn

Opgave 13:

a.



b.



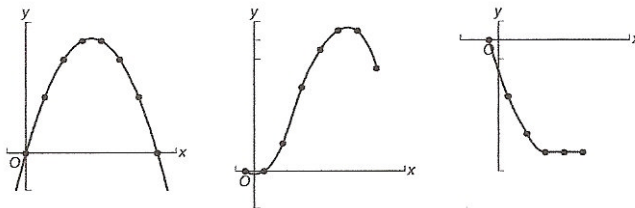
c. de verandering is constant, de grafieken zijn rechte lijnen

Opgave 14:

a. de punten liggen op een horizontale lijn

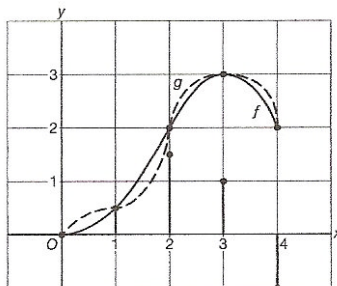
b. de punten liggen op een rechte lijn die niet horizontaal loopt

Opgave 15:

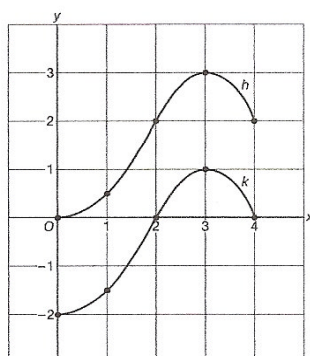


Opgave 16:

a.



b.

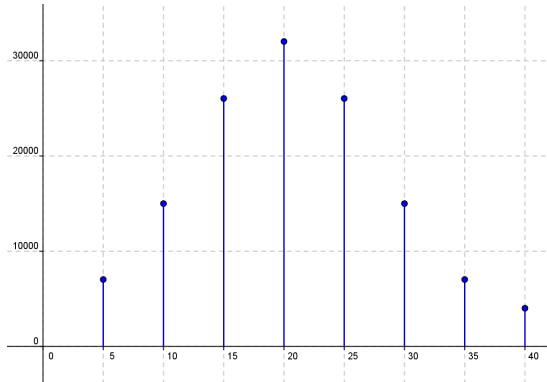


Opgave 17:

- constante daling
- afnemende stijging
- constante stijging
- toenemende daling

Opgave 18:

a.



- na 10 jaar is er 28000 m³ hout. Dus na het kappen van 20000 m³ hout je nog 8000 m³ over. Deze hoeveelheid vind je in de grafiek bij $t = 2$, dus 5 jaar later is $t = 7$, op dat moment is er 18000 m³ hout, dus kan er niet 20000 m³ hout gekapt worden.
- de grootste toename is in de periode van $t = 15$ tot $t = 20$, hij kan dan het beste 32000 m³ hout kappen, want dan komt de hoeveel hout weer op het tijdstip van $t = 15$ waardoor je weer in de periode met de grootste toename komt.

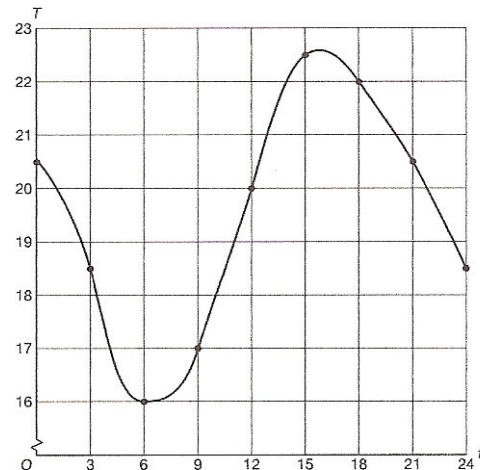
Opgave 19:

a. van 0.00 tot 24.00 uur is: $\Delta T = -2 - 2,5 + 1 + 3 + 2,5 - 0,5 - 1,5 - 2 = -2$
dus Mieke heeft gelijk

b. 21.00: $20 + 2,5 - 0,5 - 1,5 = 20,5^\circ \text{C}$

0.00: $20 - 3 - 1 + 2,5 + 2 = 20,5^\circ \text{C}$

c.



Opgave 20:

a. $h(0) = 145$ dus 145 m

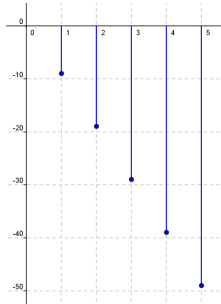
b. $y_1 = -5x^2 - 4x + 145$ calc-menu zero geeft: $x = 5$ dus na 5 sec

c.

t	0	1	2	3	4	5
h	145	136	117	88	49	0

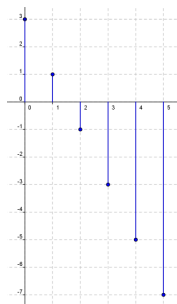
- d. eerste seconde: $136 - 145 = -9$ dus 9 m
 tweede seconde: $117 - 136 = -19$ dus 19 m
 derde seconde: $88 - 117 = -29$ dus 29 m
 vierde seconde: $49 - 88 = -39$ dus 39 m
 vijfde seconde: $0 - 49 = -49$ dus 49 m

e.



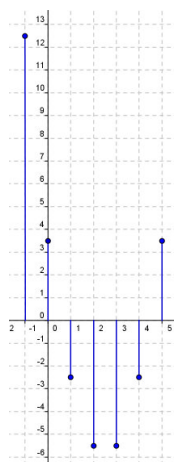
Opgave 21:

x	y	Δy
-1	1	
0	4	3
1	5	1
2	4	-1
3	1	-3
4	-4	-5
5	-11	-7



Opgave 22:

x	y	Δy
-2	-15	
-1	-2,5	12,5
0	1	3,5
1	-1,5	-2,5
2	-7	-5,5
3	-12,5	-5,5
4	-15	-2,5
5	-11,5	3,5



4.3 Differentiequotienten en snelheden

Opgave 23:

- a. $[0,3]: \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{30-0}{3-0} = 10 \text{ m/s}$
 $[3,7]: \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{165-30}{7-3} = 33,75 \text{ m/s}$
- b. $[5,6]: \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{125-85}{6-5} = 40 \text{ m/s}$
- c. $[6,7]: \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{165-125}{7-6} = 40 \text{ m/s} = 144 \text{ km/uur}$
- d. ja, op het interval $[5,7]$ is de snelheid constant
- e. nee, de grafiek is geen rechte lijn maar toenemend stijgend, dus de snelheid wordt groter

Opgave 24:

- a. eerste minuut: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{350-0}{1-0} = 350 \text{ m/min} = 21 \text{ km/uur}$
tweede minuut: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{600-350}{2-1} = 250 \text{ m/min} = 15 \text{ km/uur}$
derde minuut: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{800-200}{3-2} = 200 \text{ m/min} = 12 \text{ km/uur}$
- b. de grafiek is afnemend stijgend
- c. $\frac{800}{3} \cdot 60 = 16000 \text{ m/uur} = 16 \text{ km/uur}$
 $\frac{21+15+12}{3} = 16 \text{ km/uur}$

Opgave 25:

- a. $\Delta N = 2356 - 1993 = 363$
 $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{363}{4} = 90,75$
- b. $\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1646 - 462}{8 - 2} = 197,3$
- c. het verbindingslijnstuk op $[2,8]$ is steiler dan het verbindingslijnstuk op $[10,14]$
- d. grootst: $[4,8]$
kleinst: $[10,20]$

Opgave 26:

- a. $[6,10]: \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{13-10}{10-6} = 0,75$
 $[9,14]: \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{20-12}{14-9} = 1,6$
- b. $\Delta T = 17 - 20 = -3$
- c. $\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{17-20}{20-16} = -0,75$ dus de temperatuur daalt
- d. $[0,6]$ en $[14,16]$

Opgave 27:

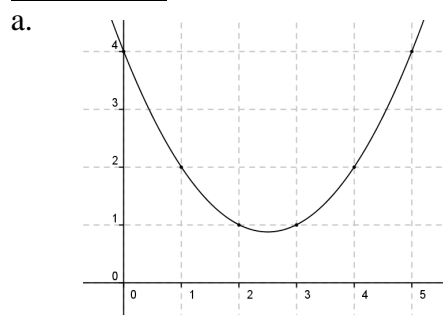
- a. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5-1}{4-2} = 2$
- b. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-3}{6-3} = 0$
- c. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-1}{0-(-3)} = -\frac{1}{3}$
- d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5}{4} = 1,25$

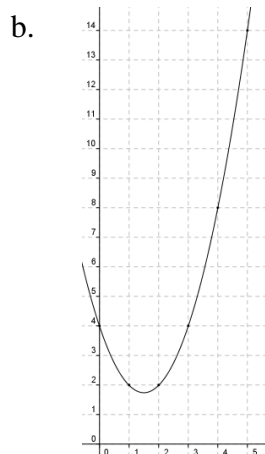
Opgave 28:

- a. $[-6,-4]: \frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{4-12}{-4-(-6)} = -4$
 $[-2,2]: \frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{6-6}{2-(-2)} = 0$
- b. $[-5,0]: \frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{0-4}{0-(-5)} = -0,8$
 $[-5,2]: \frac{\Delta K}{\Delta P} = \frac{6-4}{2-(-5)} = \frac{2}{7}$

Opgave 29:

- a. van 6.00 tot 9.00 uur en van 11.00 tot 14.30 uur, dus totaal 6,5 uur
- b. $[0,5]$ $[9,10]$ $[14\frac{1}{2},16]$
- c. $[3,16]: \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{19-12,5}{16-3} = 0,5$
 $[5,7]: \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{13-12}{7-5} = 0,5$
 $[7,17]: \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{18-13}{17-7} = 0,5$
- d. $[0,15]$
- e. $[12.40,20]$

Opgave 30:



Opgave 31:

a. $\frac{f(5) - f(1)}{5 - 1} = \frac{6 - 2}{4} = 2$

b. $\frac{f(5) - f(4)}{5 - 4} = \frac{6 - 1}{1} = 5$

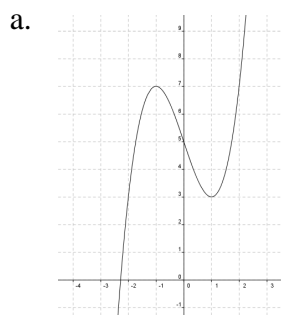
Opgave 32:

a. $\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{-6 - 6}{4} = -3$

b. $\frac{f(-1) - f(-5)}{-1 - (-5)} = \frac{6 - 50}{4} = -11$

c. $\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{-4 - (-4)}{3} = 0$

Opgave 33:



b. $\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{23 - 3}{2} = 10$

c. $\frac{f(4) - f(-2)}{4 - (-2)} = \frac{57 - 3}{6} = 9$

d. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - (-13)}{1 - (-3)} = 4$

Opgave 34:

a. $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{30 - 10}{1} = 20 \text{ m/s}$

$$b. \quad [2;2,5]: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2,5) - s(2)}{2,5 - 2} = \frac{18,25 - 10}{0,5} = 16,25 \text{ m/s}$$

$$[2;2,1]: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2,1) - s(2)}{2,1 - 2} = \frac{11,361 - 10}{0,1} = 13,61 \text{ m/s}$$

$$[2;2,01]: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2,01) - s(2)}{2,01 - 2} = \frac{10,130601 - 10}{0,01} = 13,0601 \text{ m/s}$$

$$[2;2,001]: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2,001) - s(2)}{2,001 - 2} = \frac{10,013006 - 10}{0,001} = 13,006 \text{ m/s}$$

c. de gemiddelde snelheid komt steeds dichterbij 13 m/s

$$[2;2,0001]: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(2,0001) - s(2)}{2,0001 - 2} = \frac{10,00130006 - 10}{0,0001} = 13,0006 \text{ m/s}$$

d. 13 m/s

Opgave 35:

$$t = 3: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3,62404 - 3,6}{3,01 - 3} = 2,40 \text{ m/s}$$

$$t = 5: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{10,04004 - 10}{5,01 - 5} = 4,00 \text{ m/s}$$

Opgave 36:

$$t = 1: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6,33887 - 6,33333}{1,01 - 1} = 0,55 \text{ m/s}$$

$$t = 0: \quad \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{5,51244 - 5,5}{0,01 - 0} = 1,24 \text{ m/s}$$

Opgave 37:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1,82530509 - 1,82505}{3,001 - 3} = 0,26 \text{ m}^2/\text{dag}$$

4.4 Raaklijnen

Opgave 38:

- a. $[2,5]: \frac{s(5) - s(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 16}{5 - 2} = 3 \frac{m}{s}$
 $[2,4]: \frac{s(4) - s(2)}{4 - 2} = \frac{24 - 16}{4 - 2} = 4 \frac{m}{s}$
 $[2,3]: \frac{s(3) - s(2)}{3 - 2} = \frac{21 - 16}{3 - 2} = 5 \frac{m}{s}$
 $[2;2,5]: \frac{s(2,5) - s(2)}{2,5 - 2} = \frac{18,75 - 16}{2,5 - 2} = 5,5 \frac{m}{s}$
- b. lijn AB_4

Opgave 39:

- a. de raaklijn gaat door (5,70) en (10,120)
 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{120 - 70}{10 - 5} = 10 \frac{km}{uur}$
- b. de raaklijn gaat door (0,30) en (6,70)
 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{70 - 30}{6 - 0} = 6,7 \frac{km}{uur}$
- c. de snelheid neemt af
- d. op $t = 4$

Opgave 40:

- a. constante snelheid
 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{3000}{12} = 250 \frac{m}{min} = 15 \frac{km}{uur}$
- b. de eerste drie minuten gaat hij steeds sneller lopen, daarna wordt zijn snelheid steeds lager
- c. de raaklijn in $t = 7$ gaat door (4,1250) en (10,2250)
 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2250 - 1250}{10 - 4} = 166,67 \frac{m}{min} = 10 \frac{km}{uur}$
- d. de raaklijn gaat door (10,2250) en (12,2500)
 $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2500 - 2250}{12 - 10} = 125 \frac{m}{min} = 7,5 \frac{km}{uur}$
- e. op $t = 3,5$
- f. hij loopt slechts 2500 m in 12 min, ipv de vereiste 2600 m

Opgave 41:

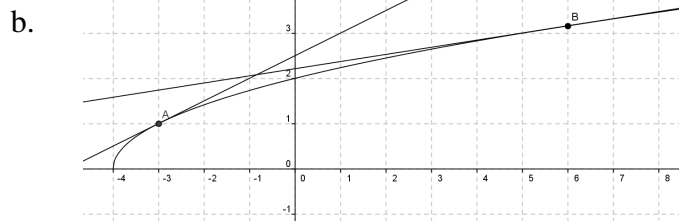
- a. de raaklijn gaat door (2,80) en (10,120)
 $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{120 - 80}{10 - 2} = 5 \frac{cm}{jaar}$
- b. de raaklijn gaat door (12,130) en (16,190)
 $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{190 - 130}{16 - 12} = 15 \frac{cm}{jaar}$
- c. $\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{180 - 50}{18 - 0} = 7,2 \frac{cm}{jaar}$

- d. de raaklijn aan de grafiek moet evenwijdig zijn met de lijn door de punten 90,50) en (18,180)
dat is voor $t = 1,5 \quad \vee \quad t = 11 \quad \vee \quad t = 15$

Opgave 42:

a. $x_A = -3: \frac{y(-2,999) - y(-3)}{-2,999 - -3} = 0,50$

$x_B = 6: \frac{y(6,001) - y(6)}{6,001 - 6} = 0,16$



Opgave 43:

$$y_1 = x^2 + x - 2$$

$$x_A = -1 \quad y_A = y_1(-1) = -2$$

$$rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-1} = -1$$

$$y = -x + b \text{ door } (-1, -2)$$

$$-2 = 1 + b$$

$$b = -3$$

$$k: y = -x - 3$$

Opgave 44:

$$y_1 = \frac{2}{x-1} + 3$$

$$x_A = 3 \quad y_A = y_1(3) = 4$$

$$rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=3} = -0,5$$

$$y = -0,5x + b \text{ door } (3, 4)$$

$$4 = -1,5 + b$$

$$b = 5,5$$

$$l: y = -0,5x + 5,5$$

Opgave 45:

$$y_1 = 1 + \frac{5x^2}{x^2 + 1}$$

$$x_A = -2 \quad y_A = y_1(-2) = 5$$

$$rc_k = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=-2} = -0,8$$

$$y = -0,8x + b \text{ door } (-2, 5)$$

$$5 = 1,6 + b$$

$$b = 3,4$$

$$k: y = -0,8x + 3,4$$

$$x_B = 1 \quad y_B = y_1(1) = 3,5$$

$$rc_l = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=1} = 2,5$$

$$y = 2,5x + b \text{ door } (1;3,5)$$

$$3,5 = 2,5 + b$$

$$b = 1$$

$$l: y = 2,5x + 1$$

$$-0,8x + 3,4 = 2,5x + 1$$

$$-3,3x = -2,4$$

$$x = 0,73$$

$$y = 2,82$$

Opgave 46:

a. $y_1 = 0,03x^3 - 1,21x^2 - 0,57x$

calc-menu zero geeft: $x = 40,8$ dus 41 min

b. $\left[\frac{dD}{dt} \right]_{t=10} = -15,77$

dus op $t = 10$ neemt de diepte met $15,77 \text{ m}/\text{min}$ toe

c. calc-menu optie min geeft: $x = 27,12$

$$\left[\frac{dD}{dt} \right]_{t=32,12} = 14,56 \text{ m}/\text{min}$$

d. op $t = 32,12$ is $D = -272,52$

$$\frac{272,52}{14,56} = 18,72$$

dus op $t = 32,12 + 18,72 = 50,84$ dus na 50 min en 50 sec

Opgave 47:

a. $y_1 = 37 + \frac{3}{2x+1}$

$$\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=2} = -0,24 \text{ dus } 0,2 \text{ } \text{°}/\text{uur}$$

b. $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=3} = -0,1225 \text{ } \text{°}/\text{uur}$

$$T(3) = 37,429$$

$$\frac{37,429 - 37}{0,1225} = 3,5 \text{ dus voor } t = 3 + 3,5 = 6,5$$

Opgave 48:

a. $y_1 = \frac{200x^2 + 1200x + 450}{4x^2 + 9}$

calc-menu max geeft $x = 1,5$

dus de inspanning duurt 1,5 minuut en de maximale hartslag was 150

b. $y_2 = 120$

calc-menu intersect geeft: $x = 3,67$

dus $\Delta t = 3,67 - 1,5 = 2,17 \text{ min} = 130 \text{ sec}$

$$\left[\frac{dF}{dt} \right]_{t=3,67} = -13,6$$

4.5 Diagnostische toets

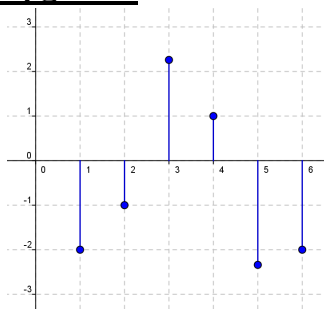
Opgave 1:

- a. $[-2, 4]$
- b. $\langle \leftarrow, 5 \rangle$
- c. $[3, \rightarrow \rangle$

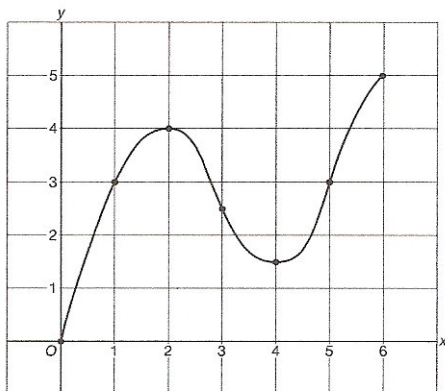
Opgave 2:

- $\langle \leftarrow, -2 \rangle$ afnemende stijging
- $\langle -2, 2 \rangle$ toenemende daling
- $\langle 2, 6 \rangle$ afnemende daling
- $\langle 6, \rightarrow \rangle$ toenemende stijging

Opgave 3:

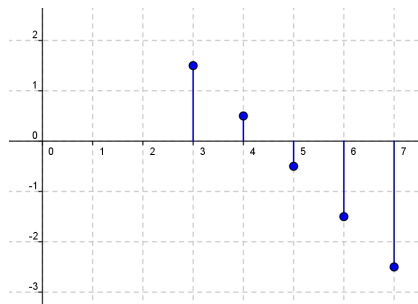


Opgave 4:



Opgave 5:

x	y	Δy
2	6	
3	7,5	1,5
4	8	0,5
5	7,5	-0,5
6	6	-1,5
7	3,5	-2,5



Opgave 6:

a. $[0, 4]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20 - 0}{4 - 0} = 5$
 $[2, 8]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{12,5 - 22,5}{8 - 2} = -1\frac{2}{3}$

b. $[1, 5]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10 - 15}{5 - 1} = -1,25$
 $[3, 7]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 26}{7 - 3} = -5,25$

Opgave 7:

$$\frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{5,5 - (-12)}{5} = 3,5$$

Opgave 8:

$$\frac{s(5,01) - s(5)}{0,01} = \frac{14,587 - 14,583}{0,01} = 0,44$$

Opgave 9:

$$rc = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ m/s}$$

Opgave 10:

a. $x_B = 0 \quad y_B = -3$
 $rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = 1,5$
 $k: y = 1,5x + b$ door $(0, -3)$
 $-3 = 0 + b$
 $b = -3$
 $y = 1,5x - 3$

b. $\frac{3x - 6}{x^2 + 2} = 0$
 $3x - 6 = 0$
 $3x = 6$
 $x = 2$
 $rc = \left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=2} = \frac{1}{2}$
 $l: y = \frac{1}{2}x + b$ door $(2, 0)$
 $0 = 1 + b$
 $b = -1$
 $y = \frac{1}{2}x - 1$

Opgave 11:

a. $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=5} = -0,6$
de temperatuur daalt op $t = 5$ met $0,6 \text{ } ^\circ\text{C}/\text{min}$

b. $T(15) = 12$
 $\left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=15} = -0,6$

$$\frac{12}{0,6} = 20$$

dus op $t = 15 + 20 = 35$